

Раздел VI. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА.

Глава 4. Квантовая статистика.

1. Применение квантовой статистики.

Возможно всегда, но в некоторых случаях необходимо.

Пусть система тождественных частиц находится в состоянии равновесия.

а) Условие квантовости (обязательное применение):

$$\langle r \rangle \leq \lambda \quad \lambda = \frac{h}{mv} \text{ - длина волны де Бройля}$$

Пример: электроны проводимости в металлах $n \sim 10^{24} \text{ см}^{-3}$,
 $v \sim 10^8 \text{ см/с}$, $\lambda \sim 10^{-7} \text{ см}$

среднее расстояние между частицами $\langle r \rangle \sim \frac{1}{n^{1/3}} \sim 10^{-8} \text{ см}$,

б) Условие идеальности

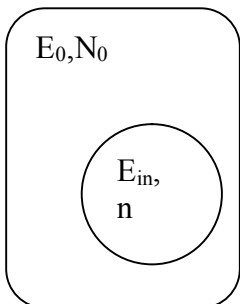
$$\langle U_{\text{вз}} \rangle \ll \langle E_{\text{кин}} \rangle$$

Для электронов проводимости

$$\langle U_{\text{вз}} \rangle \sim \frac{e^2}{\langle r \rangle} \sim 10 \text{ эВ}; \quad \langle E_{\text{кин}} \rangle \sim 10 \text{ эВ}$$

В дальнейшем будем считать, что система тождественных частиц – идеальный газ.

2. Распределение Гиббса для подсистемы с переменным числом частиц.



Пусть имеется система тождественных частиц, изолированная и находящаяся в состоянии равновесия.

$E_0 = \text{const}$ – энергия системы.

$N_0 = \text{const}$ – число частиц в системе.

Выделим в ней небольшую подсистему с числом частиц n и энергией E_{in} . E_{in} и n в подсистеме могут меняться случайным образом за счет взаимодействия с системой.

Подсистема достаточно мала, так что:

$$n \ll N_0$$

$$E_{in} \ll E_0$$

Тогда вероятность того, что в подсистеме находится n частиц и их суммарная энергия E_{in} (i -набор квантовых чисел) дается распределением Гиббса:

$$P_{E_{in}, n} = \frac{1}{Z} \cdot e^{-\frac{E_{in} - \mu n}{kT}} \cdot \Omega_{E_{in}, n}$$

μ - химический потенциал

$\Omega_{E_{in}, n}$ - статистический вес состояния подсистемы с

энергией E_{in} и числом частиц n (кратность вырождения по энергии)

Z – статистическая сумма, которая находится из условия

$$\sum_i \sum_n P_{E_{in},n} = 1 \Rightarrow$$

$$Z = \sum_i \sum_n e^{-\frac{E_{in}-\mu n}{kT}} \cdot \Omega_{E_{in},n}$$

3. Последовательный учет тождественности частиц.

С позиции квантовой механики тождественные частицы не различимы и их нельзя нумеровать.

Пусть отдельная частица может находиться в квантовых

состояниях Ψ_i с энергией ε_i , тогда в системе слабо

взаимодействующих частиц (идеальный газ) можно

выделить в качестве подсистемы частицы, находящиеся в квантовом состоянии i . В этой подсистеме

$$E_{in} = \varepsilon_i n, \Omega_{in} = 1 \Rightarrow$$

$$P_{in} = \frac{1}{z} e^{-\frac{(\varepsilon_i - \mu)n}{kT}}$$

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(\varepsilon_i - \mu)n}{kT}}$$

Среднее число частиц, находящееся в квантовом состоянии i :

$$\langle n_i \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n P_{in} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{z} \cdot e^{-\frac{(\varepsilon_i - \mu)n}{kT}}$$

В дальнейшем нужна будет связь между $\langle n_i \rangle$ и Z :

$$\langle n_i \rangle = kT \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \quad \text{Формула легко доказывается прямой подстановкой } Z.$$

4. Распределение Ферми – Дирака

справедливо для системы тождественных фермионов (электроны, протоны, нейтроны $S=1/2$)

В системе тождественных фермионов, согласно запрету

Паули, не может быть 2 частиц в одинаковых квантовых

состояниях. Поэтому в подсистеме частиц, находящихся в

одинаковом квантовом состоянии у фермионов может

находиться 0 или 1 частица ($n=0,1$) =>

$$z = \sum_{n=0}^1 e^{-\frac{(\varepsilon_i - \mu)n}{kT}} = 1 + e^{-\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}}$$

$$\langle n_i \rangle = kT \frac{\partial \ln z}{\partial \mu} = kT \frac{1}{z} \left(\frac{1}{kT} e^{-\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} \right)$$

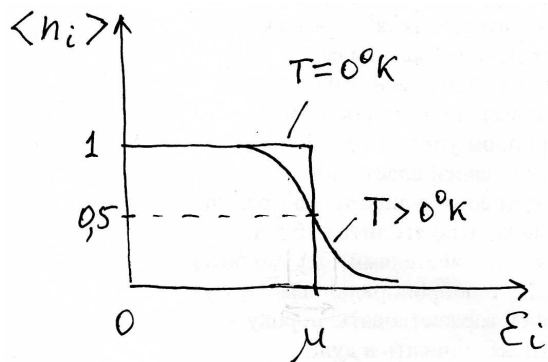
Распределение Ферми – Дирака.

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} + 1}$$

$\langle n_i \rangle$ - среднее число фермионов в квантовом состоянии i ;

ε_i - энергия квантового состояния i ;

μ - химический потенциал.



Химический потенциал находится из условия:

$$\sum_i \langle n_i \rangle = N$$

N – число фермионов в системе, суммирование ведется по всем квантовым состояниям.

5. Распределение Бозе – Эйнштейна

Справедливо для системы тождественных бозонов (фотоны $S=1$, мезоны $S=0$).

В системе тождественных бозонов запрет Паули не действует, поэтому:

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(\varepsilon_i - \mu)n}{kT}}$$

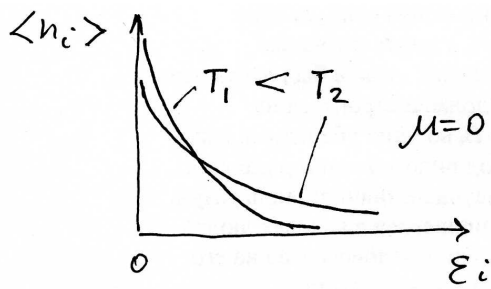
Сумма сходится, если $\mu \leq 0$. В этом случае сумма представляет бесконечную убывающую геометрическую прогрессию:

$$z = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}; q = e^{-\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}}$$

$$z = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}}} \Rightarrow \langle n_i \rangle = kT \frac{\partial \ln z}{\partial \varepsilon_i} \Rightarrow \langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} - 1}$$

Распределение Бозе – Эйнштейна:

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} - 1}$$



С уменьшением температуры T бозоны стремятся занять самое нижнее по энергии квантовое состояние (бозе конденсат)

Химический потенциал μ находится так же как и для фермионов из условия:

$$\sum_i \langle n_i \rangle = N$$

Вопросы:

1. Условие необходимости применения квантовой статистики.
2. Распределение Ферми – Дирака.
3. Распределение Бозе – Эйнштейна.